Exercice 20 :

Soit $x \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $U_n = x^n - 1$

1°/ Montrer que :

a) PGCD $(U_n , U_{n+1}) = x - 1$

b) Trouver x tel que U_n et U_{n+1} soient premiers entre eux .

2°/ Montrer que si d est un diviseur positif de n alors U_d est un diviseur de U_n .

3°/ Soit n , $m \in \mathbb{N}^*$ et δ = PGCD (n,m)

a) Montrer qu'il existe p et q entiers vérifiant : $\delta = mp - nq$

b) En déduire que : $U_\delta = U_{mp} - U_{nq}(U_\delta + 1)$

c)Monter que : $U_{nq} \wedge U_{mq} = U_\delta$

d) Monter que : $U_n \wedge U_m = U_\delta$